Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010

Épreuve de Mathématiques

Correction

Exercice 1

Question 1a

$\overrightarrow{AB}(-3;-4;1)$; $\overrightarrow{AC}(-5;2;-7)$.

Pour que les points A, B et C soient alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent être colinéaires, c'est-à-dire qu'il doit exister un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -5k \\ -4 = 2k \\ 1 = -7k \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution. Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\boxed{\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$

Question 1b

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times (-3) + (-1) \times (-4) + (-1) \times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-5) + (-1) \times 2 + (-1) \times (-7) = -5 - 2 + 7 = 0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Puisque $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

$\boxed{\vec{n} \text{ est un vecteur normal du plan } (ABC).}$

Question 1c

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}(1;-1;-1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme $x-y-z+d=0$ avec d constante réelle.

Le point A appartient au plan (ABC) donc les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan (ABC).

$x_A - y_A - z_A + d = 0 \Rightarrow 1-(-2)-4+d=0 \Rightarrow d=1$

L'équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x-y-z+1=0$.

$\boxed{(ABC): x-y-z+1=0.}$

Question 2a

Soit (Δ) la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

$\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Une représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

Question 2b

Le point O' est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Le point O appartient à la fois à la droite (Δ) et au plan (ABC). Les coordonnées de O' vérifient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x_{O'} - y_{O'} - z_{O'} + 1 = 0 \\ x_{O'} = t \\ y_{O'} = -t \\ z_{O'} = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-(-t)-(-t)+1=0 \\ x_{O'} = t \\ y_{O'} = -t \\ z_{O'} = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ x_{O'} = -\dfrac{1}{3} \\ y_{O'} = \dfrac{1}{3} \\ z_{O'} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Le point } O' \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).}$

Question 3a

Le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).

$$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\Rightarrow t=\frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$$

On a bien

$$\boxed{t=\frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}}$$

Question 3b

$\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$.

$$t=\frac{2\times(-2)+6\times 6+(-5)\times(-8)}{\sqrt{(-2)^2+6^2+(-8)^2}^2}=\frac{72}{104}=\frac{9}{13}$$

On a donc $\boxed{t=\frac{9}{13}}$.

$\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H=t\times x_{\overrightarrow{BC}}+x_B\\ y_H=t\times y_{\overrightarrow{BC}}+y_B\\ z_H=t\times z_{\overrightarrow{BC}}+z_B\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H=\frac{9}{13}\times(-2)+(-2)\\ y_H=\frac{9}{13}\times 6+(-6)\\ z_H=\frac{9}{13}\times(-8)+5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H=-\frac{44}{13}\\ y_H=-\frac{24}{13}\\ z_H=-\frac{7}{13}\end{cases}$$

$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{44}{13};-\frac{24}{13};-\frac{7}{13}\right).}$

Exercice 2

Question 1

	Rouge	Pas Rouge	Total
Numéro 1	20%	0%	20%
Numéro 2	8%	72%	80%
Total	28%	72%	100%

La probabilité de tirer une boule rouge est de 0,28.

Question 2

Soit R l'événement : « la boule tirée est rouge ».

Soit U l'événement : « la boule porte le numéro 1 ».

$$p_R(\overline{U}) = \frac{p(R \cap \overline{U})}{p(R)} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Sachant que la boule tirée est rouge, la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est $\frac{2}{7}$.

Question 3a

L'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule de l'urne n'a que deux issues possibles. Soit la boule tirée porte le numéro 1 (succès) avec la probabilité $p = 0{,}2$, soit elle porte le numéro 2 (échec) avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}8$. Cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli.

On répète n $(n \geq 2)$ fois cette expérience de manière indépendante et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro 1 obtenues. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$.

Pour tout entier $k \in [0; +\infty[$, on a $p(X = k) = \binom{n}{k} \times 0{,}2^k \times 0{,}8^{n-k}$.

$p(X \geq 1) = p\left(\overline{X = 0}\right) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^{n-0} = 1 - 0{,}8^n$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours de n tirages est de $1 - 0{,}8^n$.

Question 3b

$$p(X \geq 1) \geq 0{,}99$$

$$\Rightarrow 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$$

$$\Rightarrow -0{,}8^n \geq 0{,}99 - 1$$

$$\Rightarrow -0{,}8^n \geq -0{,}01$$

$$\Rightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01$$

$$\Rightarrow \ln 0{,}8^n \leq \ln 0{,}01$$

$$\Rightarrow \text{n} \ln 0{,}8 \leq \ln 0{,}01$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$$

$$\Rightarrow n \geq 21$$

Pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge soit plus grande ou égale à 0,99, il faut effectuer au moins 21 tirages.

Exercice 3

Question 1

Le triangle ADE est équilatéral direct.

Le point E est l'image du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A)$$

$$\Rightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) + z_A$$

$$\Rightarrow z_E = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1 - i) + i$$

$$\Rightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i) + i$$

$$\Rightarrow z_E = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i$$

$$\Rightarrow z_E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z_E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$$

On a bien

$$\boxed{z_E = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)}$$

Question 2

$$z_{D'} = \frac{2z_D - i}{iz_D + 1} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{2} = \frac{2-2i-i-1}{2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$\boxed{\text{L'affixe du point } D' \text{ est } z_{D'} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.}$

Question 3a

$$(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i) = \left(\frac{2z-i+2i(iz+1)}{i(z-i)}\right)(z-i) = \frac{2z-i-2z+2i}{i} = \frac{i}{i}$$
$$= 1$$

On a bien

$$\boxed{(z'+2i)(z-i) = 1}$$

Question 3b

$$(z'+2i)(z-i) = 1$$

$$\Rightarrow (z'-z_B)(z-z_A) = 1$$

$$\Rightarrow |(z'-z_B)(z-z_A)| = |1|$$

$$\Rightarrow |z'-z_B||z-z_A| = 1$$

$$\Rightarrow BM' \times AM = 1$$

On a bien

$$\boxed{BM' \times AM = 1}$$

$$(z'+2i)(z-i) = 1$$

$$\Rightarrow (z'-z_B)(z-z_A) = 1$$

$$\Rightarrow \arg[(z'-z_B)(z-z_A)] = \arg 1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg(z'-z_B) + \arg(z-z_A) = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \left(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$$

On a bien

$$\boxed{\left(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Question 4a

$AD = |z_D - z_A| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Comme le triangle ADE est équilatéral, $AE = AD = \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Les points } D \text{ et } E \text{ appartiennent au cercle } (C) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

Question 4b

Voir figure en annexe.

Question 5

$BD' \times AD = 1 \Rightarrow BD' = \frac{1}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BE' \times AE = 1 \Rightarrow BE' = \frac{1}{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left.\begin{matrix}(\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + 2k\pi \\ (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) + 2k'\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BE'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{BD'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AE}) + 2k''\pi \Rightarrow (\overrightarrow{BD'}; \vec{u}) +$
$(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{AE}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AD}) + 2k'' \Rightarrow (\overrightarrow{BD'}; \overrightarrow{BE'}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) + 2k''\pi$

Or, le triangle ADE est équilatéral direct donc $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{BD'}; \overrightarrow{BE'}) == -\frac{\pi}{3} + 2k''\pi$

$BD' = BE'$ et $(\overrightarrow{BD'}; \overrightarrow{BE'}) == -\frac{\pi}{3} + 2k''\pi$ donc le triangle $BD'E'$ est équilatéral indirect.

$\boxed{\text{Le triangle } BD'E' \text{ est équilatéral indirect.}}$

Exercice 4

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A : étude de la fonction $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$

Question 1

$f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x+7)e^{-x}} = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.

On a bien

$$\boxed{f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}}$$

Question 2a

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} 4 = 4\\ \lim_{n\to+\infty} 1+7e^{-x} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1+7e^{-x}} = 4 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_1(x) = 4$$

$\lim_{n\to+\infty} f_1(x) = 4$ donc la droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à C_1 en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to-\infty} 4 = 4\\ \lim_{n\to-\infty} 1+7e^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to-\infty}\frac{4}{1+7e^{-x}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to-\infty} f_1(x) = 0$$

$\lim_{n\to-\infty} f_1(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C_1 en $-\infty$.

$\boxed{\text{Le courbe } C_1 \text{ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives } y = 0 \text{ et } y = 4.}$

Question 2b

La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 4e^x$ et $v(x) = e^x + 7$.

$u'(x) = 4e^x$ et $v'(x) = e^x$.

$f_1(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et $f_1'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{4e^x(e^x+7)-4e^x e^x}{(e^x+7)^2} = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$.

$f_1'(x) > 0$ donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

Question 2c

Tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	
f_1	0	$\nearrow$	4

D'après le tableau de variations de la fonction f_1, $0 < f_1(x) < 4$ pour tout réel x.

$\boxed{0 < f_1(x) < 4 \text{ pour tout réel } x.}$

Question 3a

$$\frac{f_1(\ln 7 + h) + f_1(\ln 7 - h)}{2} = \frac{\frac{4e^{\ln 7+h}}{e^{\ln 7+h}+7} + \frac{4e^{\ln 7-h}}{e^{\ln 7-h}+7}}{2} = \frac{2e^{\ln 7}e^{h}}{e^{\ln 7}e^{h}+7} + \frac{2e^{\ln 7}e^{-h}}{e^{\ln 7}e^{-h}+7}$$
$$= \frac{14e^{h}}{7e^{h}+7} + \frac{14e^{-h}}{7e^{-h}+7} = \frac{2e^{h}}{e^{h}+1} + \frac{2e^{-h}}{e^{-h}+1} = \frac{2e^{h}(e^{-h}+1) + 2e^{-h}(e^{h}+1)}{(e^{h}+1)(e^{-h}+1)}$$
$$= \frac{2+2e^{h}+2+2e^{-h}}{1+e^{h}+e^{-h}+1} = \frac{2(2+e^{h}+e^{-h})}{2+e^{h}+e^{-h}} = 2$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\ln 7 - h \in \mathbb{R}$, $\ln 7 + h \in \mathbb{R}$ et $\frac{f_1(\ln 7+h)+f_1(\ln 7-h)}{2} = 2$ donc le point I_1 de coordonnées $(\ln 7; 2)$ est centre de symétrie de C_1.

$\boxed{\text{Le point } I_1 \text{ de coordonnées } (\ln 7; 2) \text{ est centre de symétrie de } C_1.}$

Question 3b

$f_1'(\ln 7) = \frac{28e^{\ln 7}}{(e^{\ln 7}+7)^2} = \frac{28\times 7}{14^2} = 1$

$f_1(\ln 7) = \frac{4e^{\ln 7}}{e^{\ln 7}+7} = \frac{28}{14} = 2$

$(T_1) :\ y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$

$(T_1) :\ y = 1(x - \ln 7) + 2$

$(T_1) :\ y = x - \ln 7 + 2$

$\boxed{\text{La tangente } (T_1) \text{ à la courbe } C_1 \text{ au point } I_1 \text{ a pour équation } y = x - \ln 7 + 2.}$

Question 3c

Voir figure en annexe.

Question 4a

$f_1(x) = 4 \times \frac{e^x}{e^x+7} = 4 \times \frac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v(x) = e^x + 7$.

$F_1(x) = 4 \times \ln|v(x)| + K$ avec $K \in \mathbb{R}$

$F_1(x) = 4 \times \ln|e^x + 7| + K$

$F_1(x) = 4 \times \ln(e^x + 7) + K$

Une primitive de la fonction f_1 est la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_1(x) = 4 \times \ln(e^x + 7)$.

Question 4b

Soit m la valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0; \ln 7]$.

$$m = \int_0^{\ln 7} f_1(x)dx = [F_1(x)]_0^{\ln 7} = F_1(\ln 7) - F_1(0) = 4 \times \ln\left(e^{\ln 7} + 7\right) - 4 \times \ln(e^0 + 7)$$
$$= 4\ln 14 - 4\ln 8 = 4\ln\frac{7}{4}$$

La valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0; \ln 7]$ est $4\ln\frac{7}{4}$.

Partie B : étude de quelques propriétés de la fonction f_n

Question 1

$f_n(0) = \frac{4e^{n\times 0}}{e^{n\times 0}+7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = \frac{1}{2}$ donc le point A de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.

Question 2a

$$f_n(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4e^{nx} = 2e^{nx} + 14$$

$$\Leftrightarrow e^{nx} = 7$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{nx} = \ln 7$$

$$\Leftrightarrow nx = \ln 7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{n}$$

L'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution donc la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection I_n d'abscisse $\frac{\ln 7}{n}$.

La courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection I_n d'abscisse $\frac{\ln 7}{n}$.

Question 2b

$f_n(x) = f_1(nx) \Rightarrow f_n'(x) = nf_1'(nx) \Rightarrow f_n'(x) = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

$f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = \frac{28ne^{n\frac{\ln 7}{n}}}{\left(e^{n\frac{\ln 7}{n}}+7\right)^2} = \frac{28n7}{(7+7)^2} = n$

$f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right) = f_1\left(n\frac{\ln 7}{n}\right) = f_1(\ln 7) = 2$

$(T_n) : y = f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$

$(T_n) : y = n\left(x - \frac{\ln 7}{n}\right) + 2$

$(T_n) : y = nx - \ln 7 + 2$

La tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n a pour équation $y = nx - \ln 7 + 2$.

Question 2c

$(T_2) : y = 2x - \ln 7 + 2$ et $(T_n) : y = 3x - \ln 7 + 2$.

Voir figure en annexe.

Question 3

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx = \frac{n}{\ln 7}\left[\frac{4}{n}\ln(e^{nx}+7)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} = \frac{n}{\ln 7}\left[\frac{4}{n}\ln\left(e^{n\frac{\ln 7}{n}}+7\right) - \frac{4}{n}\ln(e^0+7)\right]$$
$$= \frac{n}{\ln 7}\times\frac{4}{n}\times[\ln 14 - \ln 8] = \frac{4}{\ln 7}\times \ln\frac{7}{4}$$

Au final, $u_n = \frac{4}{\ln 7}\times\ln\frac{7}{4}$.Puisque u_n ne dépend pas de n, la suite (u_n) est constante.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante.}}$