Baccalauréat S Métropole 22 juin 2010

Épreuve de mathématiques

Correction

Exercice 1

Partie A

Question 1

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

Vérifions que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

$$u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$$

La fonction u est bien une solution de l'équation différentielle (E).

Question 2

Les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-x}$$

Où C est une constante réelle.

Question 3

$v - u$ solution de (E')

$\Leftrightarrow (u(x) - v(x))' + u(x) - v(x) = 0$

$\Leftrightarrow u'(x) - v'(x) + u(x) - v(x) = 0$

$\Leftrightarrow v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$

$\Leftrightarrow v'(x) + v(x) = e^{-x}$

$\Leftrightarrow v$ est solution de (E)

v est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u - v$ est solution de l'équation différentielle (E').

Question 4

v est solution de (E)

$\Leftrightarrow v - u$ est solution de (E')

$\Leftrightarrow v(x) - u(x) = Ce^{-x}$

$\Leftrightarrow v(x) = Ce^{-x} + u(x)$

$\Leftrightarrow v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$

$\Leftrightarrow v(x) = (x + C)e^{-x}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (x + C)e^{-x}$$

Question 5

g est solution de l'équation différentielle (E) donc $g(x) = (x + C)e^{-x}$.

$g(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Longrightarrow g(x) = (x + 2)e^{-x}$.

L'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$ est la fonction définie par

$$g(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

Partie B

Question 1

La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f_k'(x) = (1 - x - k)e^{-x}$$

Étudions le signe de $f_k'(x)$:

$f_k'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (1 - x - k)e^{-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - x - k \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 1 - k$

La dérivée f_k' s'annule et change de signe en $1 - k$ et $f_k'(x) < 0$ sur $]-\infty; 1 - k[$ et $f_k'(x) > 0$ sur $]1 - k; +\infty[$. $\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ admet donc un maximum au point d'abscisse } 1 - k}$.

Question 2

$$f_k(1 - k) = (1 - k + k)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}$$

$\boxed{\text{Le point } M_k\big(1 - k; f_k(1 - k)\big) \text{ appartient à la courbe } \Gamma \text{ d'équation } y = e^{-x}}$.

Question 3a

La fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est une fonction strictement décroissante. Sa courbe représentative Γ est nécessairement la courbe noire. La courbe bleue est donc la représentation graphique de la fonction f_k.

Question 3b

$e^{-0} = 1$ donc la courbe Γ passe par le point de coordonnées $(0; 1)$. Sur l'axe des ordonnées, l'unité graphique vaut 1.

La fonction f_k admet un maximum au point d'abscisse $1 - k$. D'après le graphique, le maximum est atteint en -1 d'où $k = 2$.

$f_2(-2) = 0$ donc la courbe C_2 passe par le point de coordonnées $(-2; 0)$. Sur l'axe des abscisses, l'unité graphique vaut 1.

Question 4

$$I = \int_0^2 (x + 2)e^{-x} dx$$

Posons $r(x) = x + 2$ et $s'(x) = e^{-x}$.

$r'(x) = 1$ et $s(x) = -e^{-x}$.

$$I = \int_0^2 r(x)s'(x)\,dx$$

En utilisant la formule de l'intégration par parties, nous obtenons :

$$I = [r(x)s(x)]_0^2 - \int_0^2 r'(x)s(x)\,dx$$

$$I = [-(x+2)e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}\,dx$$

$$I = -4e^{-2} + 2 - [e^{-x}]_0^2$$

$$I = 4e^{-2} + 2 - e^{-2} + 1$$

$$\boxed{I = -5e^{-2} + 3}$$

I est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f_2 (fonction g de la première partie), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2.

Exercice 2

Question 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $u_n - v_n$ converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ (propriété 1).

Comme (v_n) est décroissante alors $u_n \leq v_n \leq v_0$ (car une suite décroissante est majorée par son premier terme) donc la suite (u_n) est majorée par v_0.

La suite (u_n) est croissante et majorée, d'après la propriété 2, la suite (u_n) est convergente.

Soit l_1 la limite de la suite (u_n).

Comme (u_n) est croissante alors $u_0 \leq u_n \leq v_n$ (car une suite croissante est minorée par son premier terme) donc la suite (v_n) est minorée par u_0.

La suite (v_n) est décroissante et minorée, d'après la propriété 2, la suite (v_n) est convergente.

Soit l_2 la limite de la suite (v_n).

Comme $u_n - v_n$ converge vers 0, on a $l_1 - l_2 = 0$ d'où $l_1 = l_2$.

Deux suites adjacentes sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

Question 2a

Étudions la limite des deux suites (u_n) et (v_n):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1 - 10^{-n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 1 + 10^{-n} = 1$$

Étudions les variations des suites (u_n) et (v_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 10^{-n-1} - 1 + 10^{-n} = 10^{-n-1}(-1 + 10) = 9 \times 10^{-n-1}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = 1 + 10^{-n-1} - 1 - 10^{-n} = 10^{-n-1}(1 - 10) = -9 \times 10^{-n-1}$$

Comme $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (v_n) est décroissante.

Étudions la limite de la différence $u_n - v_n$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} -2 \times 10^{-n} = 0$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent toutes les deux vers la même limite 1.

Question 2b

Étudions la limite des deux suites (u_n) et (v_n):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) + \frac{1}{n} = +\infty$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite qui est $+\infty$. Puique (u_n) et (v_n) sont divergentes, elles ne sont pas adjacentes.

Question 2c

Étudions la limite des deux suites (u_n) et (v_n):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$$

Les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite qui est 1. Comme la suite (v_n) est une suite alternée (ni croissante ni décroissante), les deux suites suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

Question 3

Étudions les variations des suites (u_n) et (v_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$$

$n + 1 > n > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow a + \frac{1}{n+1} < a + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante

$\Rightarrow \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(a + \frac{1}{n}\right) < 0$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0$

Comme $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (v_n) est décroissante.

Étudions la limite des deux suites (u_n) et (v_n):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(a+\frac{1}{n}\right) = \ln a$$

Pour que les deux suites (u_n) et (v_n) soient adjacentes, il faut qu'elles convergent vers la même limite, c'est-à-dire $1 = \ln a$ ou encore $a = e$.

$\boxed{\text{Pour que les deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ soient adjacentes, il faut que } a = e.}$

Exercice 3

Question 1

Soit Ω l'ensemble de tous les tirages possibles.

$$card(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

Soit E l'événement : « tirer deux boules blanches et une boule noire ».

$$card(E) = \binom{7}{2}\binom{3}{1} = \frac{7\times 6}{2\times 1}\times 3 = 63$$

$$p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

$\boxed{\text{La probabilité de tirer deux boules blanches et une boule noire est de } \frac{21}{40}.}$

Question 2

L'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule de l'urne et noter sa couleur a deux issues possibles. Soit la boule tirée est noire (succès), avec la probabilité $p = \frac{3}{10}$, soit la boule tirée est blanche (échec), avec la probabilité $q = 1 - p = \frac{7}{10}$. Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

On répète cette expérience cinq fois de suite de manière indépendante et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{10}$.

$p(X = k) = \binom{5}{k}\times\left(\frac{3}{10}\right)^k\times\left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}, k \in [\![0;5]\!].$

$p(X=3)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2=\binom{5}{5-3}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2=\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$

La probabilité de tirer trois boules noires est de $\binom{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^2$.

Question 3

Soit B l'événement : « Tirer une boule blanche ».

$p(B)=\frac{7}{10}$

Soit U l'événement : « Obtenir un 1 ».

$p_B(U)=\frac{1}{6}$ et $p_{\bar{B}}(U)=\frac{1}{4}$

$$p_U(B)=\frac{p(B\cap U)}{p(U)}$$

$$p_U(B)=\frac{p(B)\times p_B(U)}{p(B\cap U)+p(\bar{B}\cap U)}$$

$$p_U(B)=\frac{p(B)\times p_B(U)}{p(B)\times p_B(U)+p(\bar{B})\times p_{\bar{B}}(U)}$$

$$p_U(B)=\frac{p(B)\times p_B(U)}{p(B)\times p_B(U)+\big(1-p(B)\big)\times p_{\bar{B}}(U)}$$

$$p_U(B)=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}$$

$$p_U(B)=\frac{14}{23}$$

Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est $\frac{14}{23}$.

Question 4

X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

$$p([1;3])=\int_1^3 \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_1^3=e^{-\lambda}-e^{-3\lambda}$$

$\boxed{\text{La probabilité de l'événement « } [1 \leq X \leq 3] \text{ » est } e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.}$

Exercice 4

Question 1a

D'une part,

$\alpha^2 - 4\alpha = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(1 + i\sqrt{3})$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 - 4 - 4i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = -6 - 2i\sqrt{3}$

D'autre part,

$2\bar{\alpha} - 8 = 2\overline{1 + i\sqrt{3}} - 8$

$\Rightarrow 2\bar{\alpha} - 8 = 2(1 - i\sqrt{3}) - 8$

$\Rightarrow 2\bar{\alpha} - 8 = 2 - 2i\sqrt{3} - 8$

$\Rightarrow 2\bar{\alpha} - 8 = -6 - 2i\sqrt{3}$

On a bien, par transitivité de l'égalité :

$$\boxed{\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8}$$

Question 1b

Soient B et C les points d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A.

$OA = |z_A| = |2| = 2$

$\mathscr{C}$ a pour rayon 2.

Pour montrer que les deux points B et C appartiennent tous deux au cercle $\mathscr{C}$, il suffit de montrer que $OB = OC = 2$.

$OB = |\alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

$OC = |\bar{\alpha}| = |\alpha| = 2$

$\boxed{\text{Les points } B \text{ et } C \text{ appartiennent tous deux au cercle } \mathcal{C}}$

Question 2a

Le point E est l'image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le triangle ODE est un triangle équilatéral direct. Voir figure en annexe.

Question 2b

Le point E d'affixe z_E est l'image du point D d'affixe $z_D = 2e^{i\theta}$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a donc :

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\theta} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2e^{i\theta} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2e^{i\theta} = (1 + i\sqrt{3})e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}$$

On a bien

$$\boxed{z_E = \alpha e^{i\theta}}$$

Question 3a

F est le milieu du segment $[BD]$ d'où :

$$z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$$

On a bien

$$\boxed{z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}}$$

Question 3b

$$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}}{2}-2}{\frac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\frac{\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\frac{\alpha\left(\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}-4\right)}{2\alpha e^{i\theta}+\alpha^2-4\alpha}=\frac{\alpha\left(\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}-4\right)}{2\alpha e^{i\theta}+2\bar{\alpha}-8}$$
$$=\frac{\alpha\left(\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}-4\right)}{2(\alpha e^{i\theta}+\bar{\alpha}-4)}=\frac{\alpha}{2}$$

On a bien

$$\boxed{\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\left|\frac{z_G-2}{z_F-2}\right|=\left|\frac{\alpha}{2}\right|\Rightarrow\frac{|z_G-z_A|}{|z_F-z_A|}=\frac{|\alpha|}{2}\Rightarrow\frac{AG}{AF}=\frac{2}{2}\Rightarrow AG=AF$

Le triangle AFG est isocèle en A.

$\frac{z_G-2}{z_F-2}=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\arg\left(\frac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\arg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow\arg(z_G-z_A)-\arg(z_F-z_A)=\arg(\alpha)-\arg(2)\Rightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{AG}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{AF}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG}\right)=\frac{\pi}{3}$

$\boxed{\text{Le triangle AFG est équilatéral.}}$

Question 4

$f(-\pi)=7$; $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4-2\sqrt{3}$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=4+2\sqrt{3}$ et $f(\pi)=7$.

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, la fonction f admet un minimum local en $-\frac{\pi}{6}$ qui vaut $4-2\sqrt{3}$. Puisque $AF=\sqrt{f(x)}$, la distance AF est minimale lorsque $f(x)$ est minimale.

$\boxed{\text{La distance } AF \text{ est minimale pour } \theta=-\frac{\pi}{6}\text{. La conjecture est validée.}}$

Exercice de spécialité

Question 1a

Soit A' d'affixe $z_{A'}$, l'image du point A d'affixe $z_A=1$ par la transformation T d'écriture complexe $z'=-\overline{z}+2$.

$$z_{A'}=-\overline{z_A}+2=-1+2=1=z_A$$

$\boxed{\text{Le point } A \text{ est invariant par la transformation } T.}$

Soit Ω' d'affixe $z_{\Omega'}$ l'image du point Ω d'affixe $z_{\Omega} = 1 + i\sqrt{3}$ par la transformation T.

$$z_{\Omega'} = -\overline{z_{\Omega}} + 2 = -\left(1 - i\sqrt{3}\right) + 2 = 1 + i\sqrt{3} = z_{\Omega}$$

Le point Ω est invariant par la transformation T.

Question 1b

L'écriture complexe de la transformation T est $z' = -\overline{z} + 2$.

T est donc une similitude indirecte.

Comme T est une similitude indirecte qui possède deux points invariants, T est une symétrie axiale d'axe $(A\Omega)$.

T est une symétrie axiale d'axe $(A\Omega)$.

Question 1c

L'image d'un cercle par une symétrie axiale est un cercle de même rayon.

Soit O' d'affixe $z_{O'}$ l'image du point O par la transformation T.

$$z_{O'} = 2$$

L'image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation T est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

Question 2a

Voir figure en annexe

Question 2b

$$\left|\frac{z' - 2}{z}\right| = \frac{|z' - z_{O'}|}{|z - z_O|} = \frac{O'M'}{OM}$$

M' est sur le cercle C' de centre O' et de rayon 1 donc $O'M' = 1$.

M est sur le cercle C de centre O et de rayon 1 donc $OM = 1$.

On a donc $\boxed{\left|\frac{z'-2}{z}\right| = 1}$

$\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) = \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

On a donc $\boxed{\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$.

$\frac{z'-2}{z} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$

On a bien $\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2.}$

Question 2c

Soit r la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

$\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $\arg e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$ donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Cherchons l'unique point invariant Ψ d'affixe z_ψ par la transformation r:

$z_\psi = e^{i\frac{\pi}{3}}z_\psi + 2$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{2}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{2}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$

$\Rightarrow z_\psi = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{4}$

$\Rightarrow z_\psi = 1 + i\sqrt{3}$

$\Rightarrow z_\psi = z_\Omega$

$\boxed{\text{La transformation } r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.}$