Correction Épreuve de Mathématiques série S

Pondichéry 2010

Exercice 1

Partie A : restitution organisée des connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ donc $g-f$ est également une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$.

Pour tout $x \in [a;b]$,

$f(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow f(x) - g(x) \leq 0$

$\Longrightarrow \int_a^b f(x) - g(x)dx \leq 0$ d'après la positivité de l'intégrale

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0$ d'après la linéarité de l'intégrale

$\Longrightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$

Partie B

Question 1.a

$$f_1(x) = \ln(1+x)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \ln y = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty}$$

Question 1.b

La fonction f_1 est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$f_1'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$ donc la fonction f_1 est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[.}$

Question 1.c

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x)$.

On a alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$I_1 = \int_0^1 u'(x) \times v(x)\,dx$$

$$I_1 = [u(x) \times v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) \times v'(x)\,dx$$

$$I_1 = [x \times \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{1+x}dx$$

$$I_1 = \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}dx$$

$$I_1 = \ln(2) - [x - \ln(1+x)]_0^1$$

$$I_1 = \ln(2) - 1 + \ln(2)$$

$$\boxed{I_1 = 2\ln(2) - 1}$$

Puisque $f_1(0) = 0$ et que la fonction f_1 est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f_1 est positive sur l'intervalle $[0; 1]$. La fonction f_1 est également continue sur l'intervalle $[0; 1]$.

I_1 est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f_1, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Question 2.a

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1$ car la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $[0; 1]$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + x^n \leq 2$

$\Rightarrow \ln(1) \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2)$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $[0; 1]$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2)$

$\Rightarrow \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,dx \leq \int_0^1 \ln(2)\,dx$ car la fonction f_n est continue sur $[0; 1]$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \ln(2)}$

Question 2.b

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$ sur l'intervalle $[0; 1]$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $[0; 1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1 + x^{n+1})\, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)\, dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

Question 2.c

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est convergente.}}$

Question 3.a

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme est composée de fonctions dérivables.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Sur$]0; +\infty[$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[.}$

Question 3.b

$g(0) = 0$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ donc la fonction g est négative sur $[0; +\infty[$.

Si $x \in [0; +\infty[$ alors $x^n \in [0; +\infty[$ pour tout entier naturel n.

On a alors $g(x^n) \leq 0$.

$g(x^n) \leq 0 \Rightarrow \ln(1 + x^n) - x^n \leq 0 \Rightarrow \boxed{\ln(1 + x^n) \leq x^n}$

Question 3.c

$$0 \leq \ln(1 + x^n) \leq x^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

d'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Exercice 2

Question 1

Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.

Pour savoir si la droite D est parallèle (ou non) au plan P, il suffit de chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de la droite D et du plan P. Si l'intersection existe et est unique alors la droite D et le plan P ne sont pas parallèles. Dans tous les autres cas, la droite D et le plan P sont parallèles .

Soit $\Omega(\alpha; \beta; \gamma)$ le point d'intersection, s'il existe, de la droite D et du plan P.

$$\begin{cases} \Omega \in P \\ \Omega \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma - 3 = 0 \\ \alpha = t + 2 \\ \beta = -2t \\ \gamma = 3t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 2 - 4t + 3t - 1 - 3 = 0 \\ \alpha = t + 2 \\ \beta = -2t \\ \gamma = 3t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = 0 \\ \alpha = t + 2 \\ \beta = -2t \\ \gamma = 3t - 1 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc l'intersection de la droite D et du plan P n'existe pas. Par conséquent, la droite D et le plan P sont parallèles.

On pouvait également vérifier qu'un vecteur directeur de la droite était bien orthogonal à un vecteur normal du plan.

La proposition est vraie.

Question 2

Soient P, P' et P'' les plans d'équations cartésiennes respectives $x - 2y + 3z = 3, 2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$.

Pour savoir si les plans P, P' et P'' ont ou non un ou plusieurs points communs, il suffit de chercher un tel point.

Soit $M(a; b; c)$ un point commun, s'il existe, aux plans P, P' et P''.

$$\begin{cases} M \in P \\ M \in P' \\ M \in P'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b + 3c = 3 \\ 2a + 3b - 2c = 6 \\ 4a - b + 4c = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 2b - 3c \\ 2(3 + 2b - 3c) + 3b - 2c = 6 \\ 4(3 + 2b - 3c) - b + 4c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 2b - 3c \\ 7b - 8c = 0 \\ 7b - 8c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{21 - 5c}{7} \\ b = \dfrac{8}{7}c \end{cases}$$

En choisissant arbitrairement $c = 0$, on obtient $a = 3$ et $b = 0$.

Le point M de coordonnées $(3; 0; 0)$ appartient donc aux trois plans P, P' et P''.

La proposition est fausse.

Question 3

Soit D la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si les deux droites D et Δ sont sécantes, il suffit de chercher, s'il existe, les coordonnées de leur point d'intersection.

Soit $\Omega(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ le point d'intersection, s'il existe, des deux droites D et Δ.

$$\begin{cases} \Omega \in D \\ \Omega \in \Delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 - 3t \\ b = 1 + t \\ c = -3 + 2t \\ a = 7 + 2u \\ b = 2 + 2u \\ c = -6 - u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \\ a = 5 \\ b = 0 \\ c = -5 \end{cases}$$

Le point Ω existe et a pour coordonnées $(5; 0; -5)$. Les deux droites sont donc sécantes.

La proposition est vraie.

Question 4

Pour vérifier que l'équation du plan (ABC) est bien $x + z = 1$, il suffit de vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient bien l'équation.

$x_A + z_A = -1 + 2 = 1$

$x_B + z_B = 1 + 0 = 1$

$x_C + z_C = 3 - 2 = 1$

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x + z = 1$ donc l'équation cartésienne du plan (ABC) est bien $x + z = 1$.

La proposition est vraie.

Question 5

Pour savoir si l'on peut écrire C comme barycentre des points A et B, il suffit de savoir si les points A, B et C sont alignés. Pour ce faire, on peut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}(3; 0; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(5; -2; 2)$

Il est clair que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Par conséquent, le point C ne peut pas s'écrire comme le barycentre des points A et B.

La proposition est fausse.

Exercice 3

Question 1.a

Soit B_1 l'événement : « la première boule est blanche ».

$\overline{B_1}$ est l'événement : « la première boule tirée est rouge ».

Soit B_2 l'événement : « la seconde boule tirée est blanche ».

$\overline{B_2}$ est l'événement : « la seconde boule tirée est rouge ».

Pour que le gain algébrique du joueur soit égale à -1, il faut que le joueur obtienne une boule rouge et une boule blanche.

$$p(X=-1) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p(B_1) \times p_{B_1}\left(\overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}(B_2)$$
$$= \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} + \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} = \frac{20n}{(n+9)(n+10)}$$

On a bien

$$\boxed{p(X=-1) = \frac{20n}{(n+9)(n+10)}}$$

Question 1.b

$$p(X=4) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+9)(n+10)}$$

$$p(X=-6) = p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n^2-n}{(n+9)(n+10)}$$

On a donc

$$\boxed{p(X=4) = \frac{90}{(n+9)(n+10)} \text{ et } p(X=-6) = \frac{n^2-n}{(n+9)(n+10)}}$$

Question 1.c

$$E(X)=\sum_i x_i\times p(X=x_i)$$

$$=-6\times\frac{n^2-n}{(n+9)(n+10)}-1\times\frac{20n}{(n+9)(n+10)}+4\times\frac{90}{(n+9)(n+10)}$$

$$=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+9)(n+10)}$$

Au final,

$$\boxed{E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+9)(n+10)}}$$

Question 1.d

$$-6n^2-14n+360=-6\left(n-\frac{20}{3}\right)(n+9)=(40-6n)(n+9)$$

$\boxed{\text{L'espérance mathématique } E(X) \text{ est positive pour } n \text{ entier appartenant à l'intervalle } [2;6]}$.

Question 2.b

L'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne n'a que deux issues possibles. Soit la boule tirée est rouge (succès) avec la probabilité $p=\frac{n}{n+10}$, soit la boule tirée est blanche (échec) avec la probabilité $q=\frac{10}{n+10}$. Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

On répète 20 fois cette expérience de manière indépendante et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{n}{n+10}$.

$$P(Y=k)=\binom{20}{k}\times\left(\frac{n}{n+10}\right)^k\times\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20-k},\ k\in[\![0;20]\!]$$

On cherche n tel que $p(Y\geq 1)>0{,}999$.

$$p(Y\geq 1)>0{,}999$$

$$\Leftrightarrow p\left(\overline{Y=0}\right)>0{,}999$$

$$\Leftrightarrow 1-p(Y=0)>0{,}999$$

$$\Leftrightarrow p(Y=0)<0{,}001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0{,}001$$

$$\Leftrightarrow ln\left[\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}\right] < ln(0{,}001)$$

$$\Leftrightarrow 20ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < ln(0{,}001)$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < \frac{ln(0{,}001)}{20}$$

$$\Leftrightarrow exp\left[ln\left(\frac{10}{n+10}\right)\right] < exp\left[\frac{ln(0{,}001)}{20}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < \ exp\left[\frac{ln(0{,}001)}{20}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+10} < \frac{exp\left[\frac{ln(0{,}001)}{20}\right]}{10}$$

$$\Leftrightarrow n+10 > \frac{10}{exp\left[\frac{ln(0{,}001)}{20}\right]}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{10}{exp\left[\frac{ln(0{,}001)}{20}\right]} - 10$$

$$\Leftrightarrow n > 4$$

Lorsque l'on réalise 20 tirages successifs avec remise, il faut que l'urne contienne au moins 5 boules rouges pour que la probabilité de tirer au moins une boule rouge soit strictement supérieure à 0,999.

Question 3.a

$$p(Z \leq 50) = \int_0^{50} 0{,}01e^{-0{,}01t}dt = \left[-e^{-0{,}01t}\right]_0^{50} = -e^{-0{,}5} + 1 \approx 0{,}393$$

La probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules de l'urne avant d'obtenir une boule blanche est environ égale à 0,393 au millième près.

Question 3.b

$$p(50 \leq Z \leq 60) = p(Z \leq 10) = -e^{-0{,}1} + 1 \approx 0{,}095$$

Sachant que le joueur a déjà tiré 50 boules de l'urne, la probabilité qu'il en tire au plus 10 avant d'obtenir une boule blanche est environ égale à 0,095 au millième près.

Exercice 4

Question 1

$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 1 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$

$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) = -\frac{14}{27}$

Question 2.a

Soit P_n la propriété : « $u_n \geq 0$ ».

Démontrons la propriété P_n par récurrence.

Initialisation :

$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + 1 = \frac{67}{81}$.

$u_4 \geq 0$ donc la propriété P_4 est vraie.

Hérédité :

Supposons, pour un entier k quelconque fixé plus grand ou égal à 4, que la propriété P_k est vraie. C'est-à-dire :

$$u_k \geq 0$$

Montrons alors que la propriété P_{k+1} est également vraie. C'est-à-dire :

$$u_{k+1} \geq 0$$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{l} u_k \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}u_k \geq 0 \\ k \geq 4 \Rightarrow k - 2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}u_k + k - 2 \geq 0 \Rightarrow u_{k+1} \geq 0$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

La propriété P_4 est vraie et la propriété est héréditaire. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier $n \geq 4$. C'est-à-dire, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 4,\ u_n \geq 0}$.

Question 2.b

$u_n \geq 0$, pour tout $n \geq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n \geq 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq n - 2$

$\Longrightarrow u_{n+1} \geq (n+1) - 3$

$\Rightarrow u_N \geq N - 3$ avec $N = n + 1$ et $N \geq 5$

$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 5, \text{ nous avons bien } u_n \geq n - 3}$.

Il était également possible de refaire une démonstration par récurrence mais cela était un peu plus fastidieux.

Question 2.c

$$\lim_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$$

Puisque, pour $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$, par comparaison,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Question 3.a

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 2n - 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3} \text{ et de premier terme } v_0 = -2u_0 + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}}$.

Question 3.b

La définition explicite de la suite (v_n) est $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

On a

$$\boxed{u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}$$

Question 3.c

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4}\right]$$

$$\Rightarrow S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]}_{somme\ des\ termes\ d'une\ suite\ géométrique} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3}{2}k - \frac{21}{4}\right]}_{somme\ des\ termes\ d'une\ suite\ arithmétique}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n+1) \times \frac{-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4} \times n \times (n+1) - \frac{21}{4} \times (n+1)$$

Au final,

$$\boxed{S_n = \frac{75}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{4} \times n^2 - \frac{9}{2} \times n - \frac{21}{4}}$$